Tema 5

Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

5.1 Introducción

Las ecuaciones con las que generalmente el alumno ha trabajado responden, en su mayor parte, a la necesidad de obtener los valores numéricos de ciertas magnitudes. Pero en las aplicaciones de las matemáticas surgen con frecuencia una gran clase de problemas cualitativamente diferentes: problemas en los que la incógnita es a su vez una función. Llegamos así a las *ecuaciones funcionales* y su naturaleza puede ser, en general, muy diversa. De hecho, puede decirse que ya se conocen algunos ejemplos de ecuaciones funcionales: el cálculo de primitivas y las funciones implícitas.

Consideraremos ahora la clase más usual e importante de ecuaciones que sirve para determinar tales funciones: las llamadas *ecuaciones diferenciales*, esto es, ecuaciones en las que, además de la función desconocida, aparecen también sus derivadas de distintos órdenes.

Una posible clasificación de las ecuaciones funcionales está recogida en la siguiente tabla en la que se ha expandido la rama de las ecuaciones diferenciales:

$$\text{Ecuaciones funcionales}\begin{cases}\text{Ecuaciones diferenciales}\begin{cases}\text{ordinarias}\\ \text{en derivadas parciales}\end{cases}\\ \text{Ecuaciones integrales}\\ \text{Ecuaciones integro-diferenciales}\\ \text{Otras}\end{cases}$$

La primera clasificación que se puede dar para las ecuaciones diferenciales es dividirlas en *ordinarias* y *parciales*, según que la función incógnita dependa de una o de varias variables.

Actualmente, las ecuaciones diferenciales se han convertido en una herramienta poderosa para la investigación de los fenómenos naturales. La mecánica, la astronomía y la tecnología han sido causa de numerosos progresos en este área.

5.1.1 Ecuaciones diferenciales ordinarias y en derivadas parciales

Definición:
Se llama *ecuación diferencial ordinaria* (**E.D.O.**) a una ecuación que liga la variable independiente x, una función $y = y(x)$ (que depende sólo de la variable independiente) y sus respectivas derivadas $y', y'', ..., y^{(n)}$. Es decir, una expresión de la forma:

$$F\left(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}\right) = 0$$

A la función $y = y(x)$ la llamaremos *función incógnita*.

Definición:
Se llama *ecuación diferencial en derivadas parciales* (**E.D.P.**) a una ecuación que liga las variables independientes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, una función $y = y(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (que depende de las variables independientes) y sus respectivas derivadas parciales

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial y}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 y}{\partial^2 x_1}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots$$

Es decir, una expresión de la forma:

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial y}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 y}{\partial^2 x_1}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots\right) = 0$$

A la función $y = y(x_1, \ldots, x_n)$ la llamaremos *función incógnita.*

Definición:
Se llama *orden* de una ecuación diferencial al mayor orden de derivación que exista en la función incógnita.

Definición:
Se llama *grado* de una ecuación diferencial al mayor exponente que tenga la derivada de mayor orden.

5.1.2 E.D.O. de primer orden

En este tema sólo se estudiarán las *ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden*, es decir, ecuaciones de la forma:

$$F(x, y, y') = 0 \qquad \text{(forma implícita)}$$

Si se puede despejar y', se tendrá una ecuación de la forma:

$$y' = f(x, y) \qquad \text{(forma explícita)}$$

Por lo tanto, las E.D.O. en forma explícita serán siempre de grado 1.

5.2 Solución de una E.D.O.

Definición:
Dada la ecuación diferencial de orden n

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \qquad f : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}$$

se dice que $z = z(x) \quad z : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es *solución* de la ecuación diferencial, si satisface:

1. z es n veces derivable en I.
2. $\left(x, z(x), z'(x), \ldots, z^{(n-1)}(x)\right) \in \mathcal{D} \quad \forall x \in I.$
3. $z^{(n)}(x) = f\left(x, z(x), z'(x), \ldots, z^{(n-1)}(x)\right) \quad \forall x \in I.$

Es decir, solución de una E.D.O. es toda función que sustituida junto con sus derivadas en la ecuación conduce a una identidad.

5.2.1 Tipos de soluciones de una E.D.O.

Las soluciones de una E.D.O. pueden ser de tres tipos:

1. **Solución general**: solución de la ecuación diferencial en la que aparece *tantas constantes arbitrarias como orden de la ecuación.* En nuestro caso, al ser de primer orden, la solución general será una familia de curvas de la forma $\Phi(x, y, C) = 0$, siendo C una constante arbitraria.
2. **Solución particular**: es una solución que se obtiene al fijar los valores de las constantes arbitrarias de la solución general, en nuestro caso, al fijar el valor de la constante arbitraria C.
3. **Solución singular**: es una solución que no está incluida en la solución general; es decir, no se puede obtener a partir de ella asignando un valor conveniente a la constante.

La solución de una ecuación diferencial puede venir dada de tres formas distintas:

1. **En forma explícita** si la incógnita y viene despejada en función de la variable independiente x.
2. **En forma implícita** si la solución viene expresada por una ecuación que liga la incógnita y y la variable independiente x.
3. **En forma paramétrica** si la solución viene dada en función de un parámetro.

Definición:
A las gráficas de las soluciones se les llaman *curvas integrales*.

Un ejemplo simple de ecuaciones diferenciales es:

$$y' = f(x)$$

que se analiza en el curso de cálculo integral. En este caso simple, la solución general es:

$$y = \int f(x)\,\mathrm{d}x + C$$

cuya constante arbitraria puede determinarse si se conoce el valor $y(x_0) = y_0$. En tal caso,

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

será la solución particular.

5.3 Problemas de Cauchy

Definición:
Se llama *problema de Cauchy* o *problema de valores iniciales* asociado a una E.D.O. de orden uno, al problema de resolver:

$$(P) \equiv \begin{cases} y' = f(x,y) & \text{ecuación diferencial} \\ y(x_0) = y_0 & \text{condición inicial} \end{cases}$$

Intuitivamente de lo que se trata es de encontrar una solución de

$$y' = f(x,y)$$

pero con la condición de que pase por el punto (x_0, y_0).

5.3.1 Teoremas de existencia y unicidad de soluciones para problemas de Cauchy

Se puede constatar que un problema de Cauchy, dependiendo de las condiciones iniciales puede tener o no solución. Sería conveniente disponer de algún resultado teórico que nos asegure la *existencia* de soluciones para un problema de Cauchy, ya que si se sabe que el problema no tiene solución, no se tendrá que perder tiempo en buscar soluciones que no van a existir. Por otro lado, si se encuentra una solución del problema de Cauchy sería interesante saber si ésta es la *única* o si por el contrario pueden existir más soluciones.

Para responder a estas cuestiones se tiene el teorema de existencia y unicidad de soluciones de un problema de Cauchy.

Teorema 5.1
Sea el problema de Cauchy:

$$(P) \equiv \begin{cases} y' = f(x,y) & \textit{ecuación diferencial} \\ y(x_0) = y_0 & \textit{condición inicial} \end{cases}$$

con f definida en un rectángulo $\mathcal{R}$ centrado en (x_0, y_0):

$$\mathcal{R} \equiv \{(x,y) \quad | \quad |x - x_0| \le a \ ; \ |y - y_0| \le b \quad a, b > 0\}$$

<u>Existencia</u>: Si f es continua en $\mathcal{R}$ entonces (P) **posee** *solución.*
<u>Unicidad</u>: Si f es continua en $\mathcal{R}$ y satisface la condición de Lipschitz:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M|y_1 - y_2| \quad M \in \mathbb{R}$$

entonces **existe** *una* **única** *solución de (P).*

Nota:
La condición de Lipschitz puede sustituirse por otra más genérica que es que exista $f'_y(x, y)$ y sea continua en $\mathcal{R}$.

5.4 Resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias

En esta sección se presentan los tipos de ecuaciones diferenciales ordinarias más usuales indicando como resolverlas.

Recordemos que una ecuación diferencial puede venir dada en forma implícita $F(x, y, y') = 0$ o en forma explícita $y' = f(x, y)$. Las ecuaciones diferenciales en forma explícita resultan ser de grado uno.

Pasando una ecuación en forma explícita $y' = f(x, y)$ en función de $\mathrm{d}x$ y $\mathrm{d}y$ se obtiene $\mathrm{d}y = f(x, y)\,\mathrm{d}x$ o, de forma más general,

$$P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = 0$$

Así, en las siguientes secciones aparecerán las ecuaciones diferenciales en forma explícita, en función de los diferenciales o en forma implícita indicando el tipo y como resolverlas. Empezaremos por las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden y primer grado.

5.4.1 Ecuaciones de variables separadas

Decimos que una ecuación es de *variables separadas* si presenta la siguiente forma:

$$P(x)\,\mathrm{d}x + Q(y)\,\mathrm{d}y = 0$$

Es decir, las funciones P y Q dependen exclusivamente de x y de y respectivamente. Para obtener su solución general bastará con integrar directamente:

$$\int P(x)\,\mathrm{d}x + \int Q(y)\,\mathrm{d}y = C$$

Recordemos que la solución general de una ecuación diferencial de primer orden vendrá en función de una constante arbitraria, de ahí que sea muy importante no olvidar la constante C. Dicha constante podrá ser determinada por una condición inicial en un problema de Cauchy.

5.4.2 Ecuaciones reducibles a separadas

En este apartado se presentan algunos tipos de ecuaciones diferenciales que aún no siendo de variables separadas, se reducen a ecuaciones diferenciales equivalentes que sí lo son.

Ecuaciones en variables separables

Las ecuaciones diferenciales de la forma

$$f_1(x)g_1(y)\,\mathrm{d}x = f_2(x)g_2(y)\,\mathrm{d}y$$

reciben el nombre de *ecuaciones diferenciales separables.* Este tipo de ecuaciones se pueden reducir a variables separadas dividiendo por $g_1(y)f_2(x)$:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{g_2(y)}{g_1(y)}\,\mathrm{d}y$$

Al dividir por $g_1(y)f_2(x)$ hay que tener especial cuidado por si alguno de los factores puede ser nulo. El hecho de que $f_2(x)$ sea nulo puede afectar simplemente al dominio en el que van a estar definidas las soluciones, pero el hecho de que $g_1(y)$ se anule puede originar que se pierdan soluciones que la ecuación primitiva tenía y que al pasar a la ecuación de variables separadas ya no las tenga. Estas posibles soluciones (valores que anulen $g_1(y)$) tendrán que ser comprobadas una por una en la ecuación primitiva y, caso de que fuesen soluciones no recogidas en la solución general, serán soluciones singulares.

Ecuaciones dependientes de una recta

Las ecuaciones de la forma

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y' = f(ax + by + c) \qquad a\,,\, b\,,\, c \in \mathbb{R}$$

mediante el cambio de variable $z = ax + by + c$, se reducen a una ecuación que es de variables separables (caso anterior), ya que:

$$\mathrm{d}z = a\,\mathrm{d}x + b\,\mathrm{d}y \implies \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}z - a\,\mathrm{d}x}{b}$$

Al sustituir, obtendremos:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(ax + by + c) \implies \mathrm{d}y = f(ax + by + c)\mathrm{d}x \implies \frac{\mathrm{d}z - a\,\mathrm{d}x}{b} = f(z)\,\mathrm{d}x \implies \mathrm{d}z = \big(bf(z) + a\big)\,\mathrm{d}x$$

que es de variables separadas en x y z. Una vez resuelta esta ecuación diferencial, deshaciendo el cambio, se obtendrá la solución de y en función de x.

5.4.3 Ecuaciones diferenciales homogéneas

Una función $f(x, y)$ es homogénea de grado m con respecto a sus dos variables si

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y) \qquad\qquad \lambda \text{ constante}$$

Diremos que la ecuación diferencial $P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = 0$ es *homogénea* si $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son funciones homogéneas con respecto a sus dos variables y ambas del mismo grado de homogeneidad, es decir, la ecuación es homogénea si

$$P(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m P(x, y) \quad \text{ y } \quad Q(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m Q(x, y)$$

Para resolver una ecuación diferencial homogénea, se realiza el cambio de variable $y = tx$, obteniéndose una ecuación de variables separables.

Del cambio $y = tx$ se deduce que

$$\mathrm{d}y = t\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}t$$

con lo que al sustituir en la ecuación original, se obtiene

$$\begin{aligned} 0 &= P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = P(x, tx)\,\mathrm{d}x + Q(x, tx)(t\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}t) \\ &= x^m P(1, t)\,\mathrm{d}x + x^m Q(1, t)(t\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}t) = x^m \Big(P(1, t)\,\mathrm{d}x + Q(1, t)(t\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}t)\Big) \end{aligned}$$

con lo que obtenemos una ecuación diferencial en la que la nueva incógnita es t. Dividiendo por x^m y agrupando términos:

$$\Big(P(1, t) + tQ(1, t)\Big)\,\mathrm{d}x + x\,Q(1, t)\,\mathrm{d}t = 0$$

que es de variables separables. Separándolas, se obtiene la ecuación diferencial:

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} + \frac{Q(1, t)}{P(1, t) + tQ(1, t)}\,\mathrm{d}t = 0$$

que una vez integrada y deshaciendo el cambio $y = tx$ nos proporciona la solución general de la ecuación original.

5.4.4 Ecuaciones reducibles a homogéneas

Muchas ecuaciones diferenciales de la forma

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right) \qquad a\ ,\ b\ ,\ c\ ,\ a'\ ,\ b'\ ,\ c' \in \mathbb{R}$$

se pueden resolver reduciéndolas a ecuaciones diferenciales homogéneas, de variables separables, o variables separadas. Para resolverlas distinguiremos los dos casos siguientes:

1. Si $c = c' = 0$, la ecuación es homogénea que ya se sabe resolver.
2. Si $c \neq 0$ ó $c' \neq 0$, estudiaremos la posición relativa de las rectas $ax + by + c = 0$ y $a'x + b'y + c' = 0$ teniendo las siguientes posibilidades:

   (a) Si las rectas se cortan en (h, k), es decir, el sistema $\left\{\begin{array}{l} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{array}\right.$ admite como única solución $x = h\ ,\ y = k$, hacemos el cambio $\left\{\begin{array}{l} x = X+h \\ y = Y+k \end{array}\right.$ quedando $\left\{\begin{array}{l} \mathrm{d}x = \mathrm{d}X \\ \mathrm{d}y = \mathrm{d}Y \end{array}\right.$.

   Teniendo en cuenta que $\left\{\begin{array}{l} ah+bk+c=0 \\ a'h+b'k+c'=0 \end{array}\right.$ y sustituyendo en la ecuación diferencial, se tiene:

   $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = f\left(\frac{a(X+h)+b(Y+k)+c}{a'(X+h)+b'(Y+k)+c'}\right) = f\left(\frac{aX+bY+ah+bk+c}{a'X+b'Y+a'h+b'k+c'}\right) = f\left(\frac{aX+bY}{a'X+b'Y}\right)$$

   que ya es homogénea.

   (b) Si las rectas $\left\{\begin{array}{l} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{array}\right.$ son paralelas, es decir si:

   $$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$$

   entonces se tiene

   $$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = k \implies \left\{\begin{array}{l} a = a'k \\ b = b'k \end{array}\right.$$

   que al sustituirlo en la ecuación:

   $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{k(a'x+b'y)+c}{a'x+b'y+c'}\right)$$

   y haciendo el cambio de variable $a'x + b'y = t$:

   $$\mathrm{d}t = a'\,\mathrm{d}x + b'\,\mathrm{d}y \implies \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{b'}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} - a'\right)$$

   se convierte en una que es de variables separables.

   $$\frac{1}{b'}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} - a'\right) = f\left(\frac{kt+c}{t+c'}\right) = g(t) \implies \frac{1}{b'}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{a'}{b'} + g(t) \implies \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{a'+b'g(t)}$$

   que ya es de variables separadas.

   Observación: si se realiza el cambio de variable $ax + by = t$ se obtiene el mismo resultado.

   (c) Si las rectas $\left\{\begin{array}{l} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{array}\right.$ son coincidentes, es decir,

   $$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = k,$$

   entonces:

   $$\left\{\begin{array}{l} a = a'k \\ b = b'k \\ c = c'k \end{array}\right. \implies \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(k) = C \implies \mathrm{d}y = C\,\mathrm{d}x \implies y = Cx + C_1$$

   que será la solución general. Este tipo de ecuaciones suele tener, por regla general, una solución singular muy fácil de calcular.

5.4.5 Ecuaciones diferenciales exactas

Decimos que la ecuación diferencial

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$$

es *exacta* cuando la forma diferencial $P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ sea una forma diferencial exacta, es decir, si existe una función $U = U(x,y)$ a la que llamamos *función potencial* tal que

$$\mathrm{d}U = P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

o, equivalentemente

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P(x,y) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = Q(x,y)$$

Sabemos que la condición necesaria y suficiente para que $P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ sea diferencial exacta es que:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

Cuando la ecuación diferencial es exacta se tendrá:

$$0 = P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}U \implies \mathrm{d}U = 0 \implies U = C$$

será la solución general de la ecuación diferencial. Luego la resolución de ecuaciones diferenciales exactas se reduce a calcular la función potencial.

5.4.6 Factores integrantes

A veces la ecuación

$$P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{5.1}$$

no cumple la condición de ser exacta, pero es posible convertirla en exacta multiplicándola por cierta función $\mu(x,y)$ a la que llamaremos *factor integrante*.

Por lo tanto, para que $\mu(x,y)$ sea un factor integrante tendrá que ocurrir que la ecuación diferencial:

$$\mu(x,y)P(x,y)\,\mathrm{d}x + \mu(x,y)Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0 \tag{5.2}$$

sea exacta. Así, como la condición para que una ecuación sea exacta es que las derivadas parciales cruzadas coincidan, $\mu(x,y)$ tendrá que ser tal que:

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$$

es decir, la ecuación que debe verificar una función $\mu(x,y)$ para que sea un factor integrante es:

$$\mu P'_y + P\mu'_y = \mu Q'_x + Q\mu'_x \tag{5.3}$$

Como en la ecuación (5.3) la incógnita $\mu(x,y)$ depende de dos variables y en la ecuación aparecen, además de la propia incógnita, las derivadas parciales con respecto a x y respecto a y, se trata de una ecuación en derivadas parciales que, por regla general, es más difícil de resolver que la primitiva ecuación diferencial (5.1).

Por esa razón, para resolver la ecuación (5.3), supondremos que $\mu(x,y)$ depende de cierta relación prefijada de x e y. Así, veremos cual tiene que ser la condición para que existan factores integrantes dependientes exclusivamente de x, exclusivamente de y o de cualquier relación arbitraria $z = z(x,y)$.

Factor integrante dependiente sólo de x

Queremos ver si existe un factor integrante para la ecuación diferencial (5.1) que sea dependiente exclusivamente de x, es decir, que la función $\mu(x,y)$ sea de la forma $\mu = \mu(x)$. En este caso:

$$\mu'_x = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x} \qquad \text{(ya que } \mu \text{ depende de una sola variable)} \qquad \text{y} \qquad \mu'_y = 0 \qquad \text{(ya que } \mu \text{ no depende de } y\text{)}$$

con lo cual, al sustituir en la ecuación (5.3), se obtiene la ecuación que debe de cumplir μ para que sólo dependa de x, que será:

$$\mu P'_y = \mu Q'_x + Q\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x}$$

que es de variable separables. Separándolas:

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x}Q = \mu\left(P'_y - Q'_x\right) \implies \frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} = \frac{P'_y - Q'_x}{Q}\,\mathrm{d}x$$

Luego, para poder integrar ambos miembros será necesario que la expresión

$$\frac{P'_y - Q'_x}{Q}$$

dependa sólo de x que es con respecto a lo que queremos integrar. En ese caso un factor integrante sería:

$$\ln\mu = \int \frac{P'_y - Q'_x}{Q}\,\mathrm{d}x \quad \implies \quad \mu = \mathrm{e}^{\int \frac{P'_y - Q'_x}{Q}\,\mathrm{d}x} \tag{5.4}$$

Una vez obtenido el factor integrante, se sustituye en la ecuación (5.2) quedando una ecuación diferencial equivalente a la primitiva (5.1) que ya es diferencial exacta. Al calcular la función potencial e igualarlo a una constante arbitraria se obtiene la solución general de la ecuación diferencial primitiva.

Obsérvese que el factor integrante (5.4) podría ir multiplicado por una constante, pero dicha constante se simplificará al sustituir en (5.2).

Factor integrante dependiente sólo de y

En este caso queremos ver si existe un factor integrante para la ecuación diferencial (5.1) que sea dependiente exclusivamente de y, es decir, que la función $\mu(x,y)$ sea de la forma $\mu = \mu(y)$. Siguiendo los pasos del caso anterior se tendrá:

$$\mu'_y = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}y} \qquad \text{(ya que } \mu \text{ depende de una sola variable)} \qquad \text{y} \qquad \mu'_x = 0 \qquad \text{(ya que } \mu \text{ no depende de } x\text{)}$$

con lo cual, al sustituir en la ecuación (5.3), se obtiene la ecuación que debe de cumplir μ para que sólo dependa de y, que será:

$$\mu P'_y + P\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}y} = \mu Q'_x$$

que es de variable separables. Separándolas:

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}y}P = \mu\left(Q'_x - P'_y\right) \implies \frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} = \frac{Q'_x - P'_y}{P}\,\mathrm{d}y$$

Luego, para poder integrar ambos miembros será necesario que la expresión

$$\frac{Q'_x - P'_y}{P}$$

dependa sólo de y que es con respecto a lo que queremos integrar. En ese caso un factor integrante sería:

$$\ln\mu = \int \frac{Q'_x - P'_y}{P}\,\mathrm{d}y \quad \implies \quad \mu = \mathrm{e}^{\int \frac{Q'_x - P'_y}{P}\,\mathrm{d}y} \tag{5.5}$$

Una vez obtenido el factor integrante, se sustituye en la ecuación (5.2) quedando una ecuación diferencial equivalente a la primitiva (5.1) que ya es diferencial exacta. Al calcular la función potencial e igualarla a una constante arbitraria se obtiene la solución general de la ecuación diferencial primitiva.

Nuevamente, el factor integrante (5.5) podría ir multiplicado por una constante, pero dicha constante se simplificará al sustituir en (5.2).

Factor integrante dependiente de xy

Si existe un factor integrante de xy sea éste $\mu = \mu(xy)$. Haciendo $xy = z$ tendríamos $\mu = \mu(z)$.

$$\frac{\partial\mu}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}z}\frac{\partial z}{\partial x} = y\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}z} \qquad , \qquad \frac{\partial\mu}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}z}\frac{\partial z}{\partial y} = x\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}z}$$

Sustituyendo en la ecuación en derivadas parciales que nos da el factor integrante obtendremos:

$$\mu P'_y + P\mu'_y = \mu Q'_x + Q\mu'_x \implies \mu P'_y + P\left(x\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}z}\right) = \mu Q'_x + Q\left(y\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}z}\right) \implies$$

$$\Longrightarrow\ \mu P'_y\,\mathrm{d}z + Px\,\mathrm{d}\mu = \mu Q'_x\,\mathrm{d}z + Qy\,\mathrm{d}\mu\ \Longrightarrow\ (Px - Qy)\,\mathrm{d}\mu = \mu\left(Q'_x - P'_y\right)\,\mathrm{d}z\ \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\ \frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} = \frac{Q'_x - P'_y}{xP - yQ}\,\mathrm{d}z\ \Longrightarrow\ \mu = \mathrm{e}^{\int \frac{Q'_x - P'_y}{xP - yQ}\,\mathrm{d}z}$$

siempre que $\dfrac{Q'_x - P'_y}{xP - yQ}$ dependa exclusivamente de z.

Una vez obtenido el factor integrante, se sustituye en la ecuación (5.2) quedando una ecuación diferencial equivalente a la primitiva (5.1) que ya es diferencial exacta. Al calcular la función potencial e igualarla a una constante arbitraria se obtiene la solución general de la ecuación diferencial primitiva.

Nuevamente, el factor integrante podría ir multiplicado por una constante, pero dicha constante se simplificará al sustituir en (5.2).

Factor integrante dependiente de $x+y$

Si existe un factor integrante de $x+y$ sea éste $\mu = \mu(x+y)$. Haciendo $x+y=z$ tendríamos $\mu = \mu(z)$.

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}z} \quad , \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}z}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}z}$$

Sustituyendo en la ecuación en derivadas parciales que nos da el factor integrante obtendremos:

$$\mu P'_y + P\mu'_y = \mu Q'_x + Q\mu'_x\ \Longrightarrow\ \mu P'_y + P\left(\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}z}\right) = \mu Q'_x + Q\left(\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}z}\right)\ \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\ \mu P'_y\,\mathrm{d}z + P\,\mathrm{d}\mu = \mu Q'_x\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}\mu\ \Longrightarrow\ (P - Q)\,\mathrm{d}\mu = \mu\left(Q'_x - P'_y\right)\,\mathrm{d}z\ \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\ \frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} = \frac{Q'_x - P'_y}{P - Q}\,\mathrm{d}z\ \Longrightarrow\ \mu = \mathrm{e}^{\int \frac{Q'_x - P'_y}{P - Q}\,\mathrm{d}z}$$

siempre que $\dfrac{Q'_x - P'_y}{P - Q}$ dependa exclusivamente de z.

Una vez obtenido el factor integrante, se sustituye en la ecuación (5.2) quedando una ecuación diferencial equivalente a la primitiva (5.1) que ya es diferencial exacta. Al calcular la función potencial e igualarla a una constante arbitraria se obtiene la solución general de la ecuación diferencial primitiva.

Nuevamente, el factor integrante podría ir multiplicado por una constante, pero dicha constante se simplificará al sustituir en (5.2).

Análogamente hallaríamos factores integrantes dependientes de:

$$\frac{x}{y}\ ,\ x + y^2\ ,\ x^2 + y^2\ ,\ y + x^2\ ,\ \ldots$$

5.4.7 Tipos especiales de ecuaciones diferenciales

A continuación pasaremos a comentar algunos tipos de ecuaciones que se pueden reducir a los ya vistos a lo largo de este tema.

Ecuaciones diferenciales lineales

Son las ecuaciones de la forma:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + yP(x) = Q(x)$$

con $P(x)$ y $Q(x)$ continuas en el dominio exigido a la ecuación. Su solución general es:

$$y = y_h + y_0$$

donde y_h es la solución general de la ecuación homogénea asociada $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + yP(x) = 0$ e y_0 es una solución particular de la ecuación completa. La solución particular de la ecuación la buscaremos por el método de variación de las constantes.

Otro método para resolver este tipo de ecuaciones es el siguiente:

1. Buscamos un factor integrante que dependa sólo de x:

$$\mathrm{d}y + yP(x)\,\mathrm{d}x = Q(x)\,\mathrm{d}x \Longrightarrow \Big(yP(x) - Q(x)\Big)\,\mathrm{d}x + \,\mathrm{d}y = 0$$

   que es una ecuación reducible a exacta donde:

$$\begin{cases} P_1(x,y) = yP(x) - Q(x) \\ \\ Q_1(x,y) = 1 \end{cases}$$

2. El factor integrante será:

$$\mu(x) = \mathrm{e}^{\int \frac{P'_{1y} - Q'_{1x}}{Q_1}\,\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}$$

   que, evidentemente, depende tan sólo de x.

3. Multiplicamos toda la expresión por el factor integrante:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{e}^{\int P(x)\,\mathrm{d}x} + yP(x)\,\mathrm{e}^{\int P(x)\,\mathrm{d}x} = Q(x)\,\mathrm{e}^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y\,\mathrm{e}^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\right) = Q(x)\,\mathrm{e}^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}$$

   Integrando respecto a x:

$$y\,\mathrm{e}^{\int P(x)\,\mathrm{d}x} = \int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C \Longrightarrow y = \mathrm{e}^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\left(\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + C\right)$$

   que es la solución general de las ecuaciones diferenciales lineales.

Ecuación de Bernouille

Son las del tipo:

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \qquad n \in \mathbb{Z} \qquad ; \qquad n \neq 0\,,\,1$$

Dividiendo por y^n, nos queda:

$$\frac{y'}{y^n} + \frac{P(x)}{y^{n-1}} = Q(x) \tag{5.6}$$

Hacemos el cambio $z = \dfrac{1}{y^{n-1}}$. Con ello tenemos:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1-n}{y^n}y' \Longrightarrow \frac{y'}{y^n} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\,\frac{1}{1-n}$$

Sustituyendo en la ecuación (5.6) nos queda:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\,\frac{1}{1-n} + zP(x) = Q(x) \Longrightarrow \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + z(1-n)P(x) = (1-n)Q(x)$$

que es una ecuación diferencial lineal.

Observación:
Para el caso $n = 0$ se obtiene una ecuación diferencial lineal y si $n = 1$ se obtiene una que es de variables separables.

Ecuación de Riccati

Son las del tipo:

$$y' + P(x)y + Q(x)y^2 = R(x) \tag{5.7}$$

Para este caso es necesario conocer (al menos) una solución particular de la ecuación. Sea y_p esa solución particular. Entonces efectuamos el cambio $y = y_p + z$ y nuestra ecuación queda reducida a una del tipo Bernouille. Veámoslo:

Hacemos el cambio $y = y_p + z$. Con ello tenemos:

$$y' = y_p' + z'$$

Sustituyendo en la ecuación (5.7) nos queda:

$$y_p' + z' + P(x)\,(y_p + z) + Q(x)\left(y_p^2 + 2y_pz + z^2\right) = R(x) \implies z' + P(x)z + Q(x)2y_pz + Q(x)z^2 = 0$$

ya que y_p es solución de la ecuación original.

Ordenando y agrupando tenemos:

$$z' + z\Big(P(x) + Q(x)2y_p\Big) = -Q(x)z^2$$

que es una ecuación de Bernouille, con $n = 2$.

Observación:
Si $P(x) + Q(x)2y_p = 0$, se obtiene una ecuación diferencial de variables separables.

Ecuaciones de primer orden y de grado n con respecto a y'

Son ecuaciones de la forma:

$$(y')^n + P_1(x,y)(y')^{n-1} + \cdots + P_{n-1}(x,y)y' + P_n(x,y) = 0 \tag{5.8}$$

Para resolverla de manera general despejamos y'. Por lo tanto tendremos n soluciones para y' de la forma:

$$y' = f_1(x,y) \quad , \quad y' = f_2(x,y) \quad , \quad \ldots \quad , \quad y' = f_n(x,y) \tag{5.9}$$

que son las n soluciones de la ecuación (5.8). Ahora nos bastaría con resolver las n ecuaciones diferenciales descritas en (5.9) que son de tipos ya conocidos y obtener las n soluciones de la forma:

$$G(x,y,C_1) = 0 \quad ; \quad G(x,y,C_2) = 0 \quad ; \quad \ldots \quad ; \quad G(x,y,C_n) = 0$$

5.5 Cálculo de trayectorias

Terminamos el tema mostrando una de las muchas aplicaciones geométricas que tienen las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden: el cálculo de trayectorias ortogonales.

Dada un familia de curvas $f(x,y,C) = 0$, se llama trayectoria a toda curva que corte a cada una de las curvas de la familia bajo un ángulo constante w.

Nosotros vamos a ocuparnos del cálculo de aquellas trayectorias tales que $w = 90$, a las que llamaremos *trayectorias ortogonales.*

La estrategia a seguir en el cálculo de trayectorias ortogonales puede sistematizarse por medio del siguiente tratamiento general:

1. Sea
$$f(x,y,c) = 0 \tag{5.10}$$
una familia de curvas de la cual queremos obtener el haz ortogonal (trayectorias ortogonales). La definición anterior nos sitúa el problema en una relación entre tangentes y, por ello, un problema de derivación.

2. Derivando con respecto a x la expresión (5.10), tenemos:

$$f'_x(x,y,c) + f'_y(x,y,c)y' = 0 \tag{5.11}$$

3. Eliminando la constante c de (5.10) y (5.11) se obtiene una ecuación diferencial:

$$F(x,y,y') = 0$$

4. Para obtener el haz de trayectorias ortogonales, tendremos que resolver, utilizando la condición de perpendicularidad, la E.D.:

$$F\left(x,y,-\frac{1}{y'}\right) = 0$$