SUBSECRETARÍA DE EDUCACIÓN SUPERIOR
DIRECCIÓN GENERAL DE EDUCACIÓN SUPERIOR TECNOLÓGICA
INSTITUTO TECNOLÓGICO DE QUERÉTARO

MÉTODOS NUMÉRICOS
(Ingeniería Mécanica y Mecatrónica [AEC-1046])
UNIDAD 6. Ecuaciones diferenciales ordinarias
6.1 Fundamentos de ecuaciones diferenciales

ANÁLISIS NUMÉRICO

(Ingeniería Electrónica, [ETF-1003])
UNIDAD 6. Solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales
6.1. Solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias

Santiago de Querétaro, México
Mayo de 2019

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

A las ecuaciones compuestas por una función desconocida y su(s) derivada(s), se les conoce como **ecuaciones diferenciales**, por ejemplo: La ecuación para calcular la velocidad v de un paracaidista, de acuerdo a la segunda ley de Newton en función del tiempo es:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}\, v \qquad (VI.1)$$

Donde g es la constante gravitacional, m es la masa y c es el coeficiente de rozamiento. Algunas veces se les llama *ecuaciones de proporción* o de *razón de cambio* ya que expresan el cambio proporcional de una variable a través de una función de variables y parámetros. Estas ecuaciones juegan un papel muy importante en la ingeniería ya que muchos fenómenos físicos se formulan matematicamente en términos de su cambio proporcional.

En la ecuación $(VI.1)$ a la magnitud que se va a diferenciar, v, se le conoce como *variable dependiente*. A la cantidad respecto de la cual se va a derivar, t, se le llama *variable independiente*. Cuando la función incluye una variable independiente, se le llama *ecuación diferencial ordinaria (EDO)*. En contraste con las *ecuaciones diferenciales parciales (EDP)* que comprenden dos o más variables independientes.

A las ecuaciones diferenciales también se le clasifica por su orden. Por ejemplo a la ecuación $(VI.1)$ se le llama *ecuación de primer orden* ya que la derivada mayor corresponde a una primera derivada. Una *ecuación de segundo orden incluiría* una segunda derivada, por ejemplo:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0 \qquad (VI.2)$$

Las ecuaciones de orden superior se les puede reducir a un sistema de de ecuaciones de primer orden. Para la ecuación $(VI.2)$ esto se lleva a cabo definiendo una nueva variable:

$$y = \frac{dx}{dt} \qquad (VI.3)$$

Que se puede derivar y obtener:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad (VI.4)$$

Las ecuaciones (VI.3) y (VI.4) se pueden sustituir en la ecuación (VI.2) y obtener

$$m\frac{dy}{dt} - cy + kx = 0 \qquad (VI.5)$$

O bien:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{cy + kx}{m} \qquad (VI.6)$$

Por lo tanto las ecuaciones $(VI.3)$ y $(VI.6)$ son un par de ecuaciones de primer orden que son equivalentes a la ecuación original de segundo orden.

MÉTODOS ANTERIORES AL USO DE LAS COMPUTADORAS EN LA SOLUCIÓN DE EDO'S

Antes de la era de la computación, las EDO se resolvían por lo común, con métodos de integración analítica. Por ejemplo, la ecuación $(VI.1)$ se puede multiplicar por dt e integrarse para obtener:

$$\left(\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}\ v\right)\ dt$$

$$v = \int \left(g - \frac{c}{m}\ v\right)\ dt \qquad (VI.7)$$

Al lado derecho de esta ecuación hay una integral indefinida, se le llama así debido a que los límites de integración no están definidos.

Se obtiene la solución analítica de la ecuación $(VI.7)$ si la integral indefinida se puede evaluar exactamente en forma de una ecuación, suponiendo que $v = 0$ en $t = 0$. Sin embargo las soluciones exactas de muchas EDO's no existen. Entonces los métodos numéricos ofrecen la única alternativa viable en estos casos. Pero estos métodos requieren del uso de computadoras por lo cual los ingenieros se veian limitados en el alcance de sus investigaciones.

Una solución de una EDO es una *función específica de la variable independiente* y de sus parámetros que satisfagan a la ecuación diferencial original. Para ilustrar este concepto se tiene la siguiente función:

$$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + 1 \qquad (VI.8)$$

la cual es un polinomio de cuarto orden. Ahora si derivamos la ecuación $(VI.8)$ se obtiene la EDO:

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5 \qquad (VI.9)$$

Esta ecuación también describe el comportamiento del polinomio pero de manera diferente que la ecuación $(VI.8)$. En lugar de representar explícitamente los valores de y para cada uno de los valores de x, la ecuación $(VI.9)$ proporciona la relación de cambio de y respecto de x, esto es, la pendiente para cada valor de x. En la figura 1 se muestra la función y su derivada graficada contra x.

Nótese que los valores de cero de la derivada corresponden a un punto donde la función original es plana, esto es, tiene una pendiente cero.

El objetivo es determinar la **función original** dada la ecuación diferencial. Entonces la **función original representa la solución**. En este caso se puede determinar la solución en forma analítica integrando la ecuación $(VI.9)$:

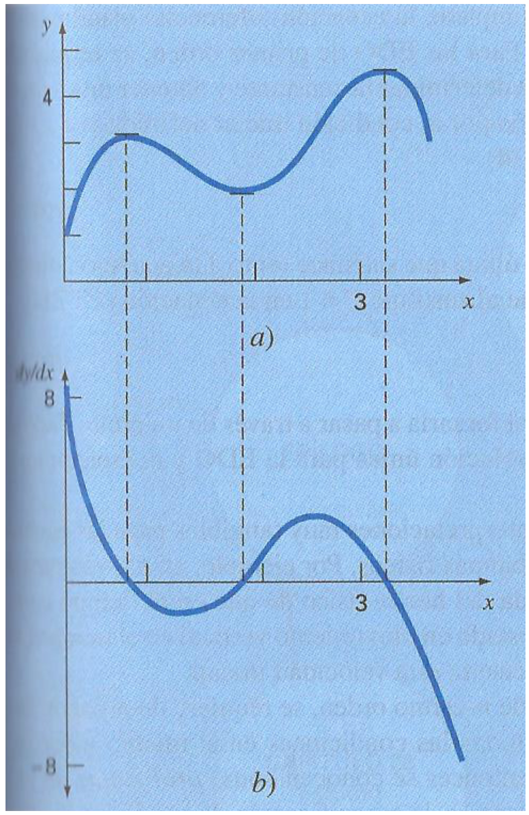

Figura 1:

$$y = \int [-2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5]\ dx$$

Aplicando la regla de integración:

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad\qquad n \neq -1$$

Al resolver cada término de la ecuación se obtiene la solución:

$$y = -2\ \frac{x^4}{4} + 12\ \frac{x^3}{3} - 20\ \frac{x^2}{2} + 8.5\ x + C$$

$$y = -0.5\ x^4 + 4\ x^3 - 10\ x^2 + 8.5\ x + C \qquad\qquad (VI.10)$$

La función (ecuación (VI.10)) es idéntica a la original con una excepción. En el acto de la derivación e integración, se pierde el valor de la constante 1 de la ecuación original y se gana el valor de C, esta C es conocida con el nombre de constante de integración. El hecho de que aparezca una constante indica que la solución no es única. De hecho ésta es sólo una de un número infinito de soluciones posibles (correspondientes a un número infinito de valores posibles

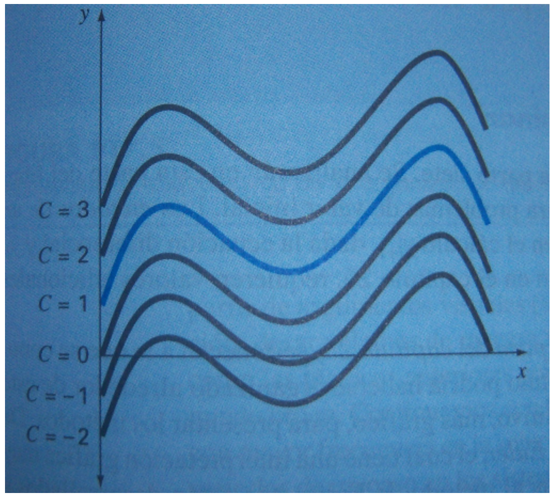

Figura 2:

para C) que satisfacen a la ecuación diferencial. En la figura 2 se muestran algunas posibles funciones que satisfacen a la ecuación $(VI.10)$

La figura 2 muestra seis posibles soluciones para la $\int[-2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5]\, dx$. Cada una corresponde a un valor diferente de la constante de integración C.

Por lo tanto para especificar la solución completamente, una ecuación diferencial se acompaña de condiciones auxiliares. para EDO's de primer orden, a un tipo de condición auxiliar se le llama valor inicial y es necesario para determinar la contante de integración y obtener una solución única. Por ejemplo la ecuación $(VI.9)$ puede ir acompañada de una condición inicial en $x = 0$, $y = 1$ estos valores se sustituyen en la ecuación $(VI.10)$

$$y = -0.5\ x^4 + 4\ x^3 - 10\ x^2 + 8.5\ x + C \qquad (VI.10)$$

$$1 = -0.5\ (0)^4 + 4\ (0)^3 - 10\ (0)^2 + 8.5\ (0) + C \qquad (VI.11)$$

Por lo tanto $C = 1$. Y la solución única que satisface la ecuación diferencial y a la condición inicial especificada se obtiene sustituyendo $C = 1$ en la ecuación $(VI.10)$ para obtener:

$$y = -0.5\ x^4 + 4\ x^3 - 10\ x^2 + 8.5\ x + 1$$

De esta manera se ha considerado en la ecuación $(VI.10)$ que pasa a través de la condición inicial, al hacerlo se ha obtenido una solución única para la EDO y se ha llegado a la función inicial.

Cuando se trata de ecuaciones diferenciales de $n-$ésimo orden se requieren n condiciones para obtener una solución única. Si todas las condiciones se especifican en el mismo valor de la variable independiente (por ejemplo en x o $t = 0$), entonces al problema se le conoce como problema del *valor inicial*. Esto contrasta con los *problemas de valor en la frontera* en donde la especificación de las condiciones ocurren con valores diferentes de la variable independiente.

Métodos de Runge-Kutta

Estos métodos solucionan EDOs de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

El criterio utilizado para encontrar la solución de la EDO es el siguiente:

`Nuevo valor = valor anterior + pendiente x tamaño del paso`

O en términos mátemáticos:

$$y_{i+1} = y_i + \phi h \qquad (1)$$

De acuerdo a ésta ecuación, la pendiente estimada ϕ se usa para extrapolar un nuevo valor de y_{i+1} a partir de un valor anterior y_i en un distancia h véase la figura 3, Esta formula se puede aplicar paso a paso para aproximar cada valor futuro de y, por lo tanto, es posible trazar la trayectoria aproximada de la solución.

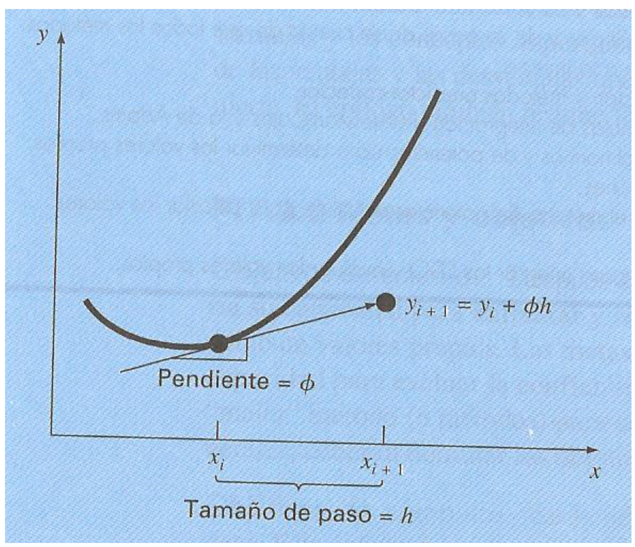

Figura 3:

Todos los métodos de un paso se pueden expresar en esta forma general, la única diferencia es el calculo de la pendiente. En otras palabras, la pendiente al inicio del intervalo se toma como una aproximación de la pendiente promedio sobre todo el intervalo. Este procedimiento es llamado *método de Euler*. Existen varios métodos de un paso que emplean aproximaciones alternativas de la pendiente que ofrecen como resultado mejores aproximaciones de solución.

MÉTODO DE EULER

La primera derivada proporciona una aproximación directa de la pendiente en x_i, véase la figura 4:

$$\phi = f(x_i, y_i)$$

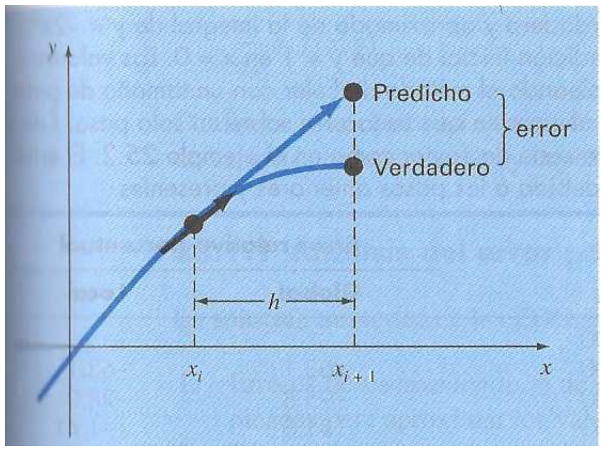

Figura 4:

donde $f(x_i, y_i)$ es propiamente la ecuación diferencial evaluada en x_i y y_i. Tal estimación podrá sustituirse en la ecuación (1):

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h \qquad (2)$$

Esta fórmula es conocida como el *método de Euler* (o de *Euler-Cauchy* o de *punto medio*). Se predice un nuevo valor de y por medio de la pendiente (igual a la primera derivada, dado el punto (x_i, y_i)) que habrá de extrapolarse en forma lineal sobre el tamaño del paso h (véase la figura 4).

Ejemplo: Use el método de Euler para integrar numéricamente la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

$$f(x, y) = -2x^3 + 12x^2 - 20x + 8.5$$

desde $x = 0$ hasta $x = 4$ con un tamaño de paso de 0.5. Dada la condición inicial en $x = 0$ entonces $y = 1$. Recuerde que la solución exacta es la ecuación

$$y = -0.5x^4 + 4x^3 - 10x^2 + 8.5x + 1 \qquad (VI.8)$$

Solución. Utilizamos la ecuación (2) para implementar el método de Euler.

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h \qquad (2)$$

y resumiendo los valores encontrados en una tabla como la siguiente:

i	x_i	y_{Euler}	$f(x_i, y_i)$, $\frac{dy}{dx}$	$y_{verdadera}$	ε_v
0	0.0	1.000			

$i = 0 \quad y_i = y(0) \quad y_{i+1} = y(0.5) \quad f(x_i, y_i) = f(0, 1) \quad h = 0.5 \quad \therefore$

$$y(0.5) = y(0) + f(0, 1)\ 0.5$$

Donde $y(0) = 1$ y el calculo de la pendiente en $x = 0$ es:

$$f(0, 1) = -2(0)^3 + 12(0)^2 - 20(0) + 8.5 = 8.5 \qquad \therefore \quad y_{i+1}$$

$$y(0.5) = 1.0 + 8.5\ (0.5) = 5.25$$

La solución verdadera en $x = 0.5$ es:

$$y = -0.5(0.5)^4 + 4(0.5)^3 - 10(0.5)^2 + 8.5(0.5) + 1 = 3.21875$$

$$\varepsilon_v = \left| \frac{3.21875 - 5.25}{3.21875} \right| \times 100 = 63.11\,\%$$

Ahora para $y_2 = y(1.0)$

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h \qquad (2)$$

$i = 1 \quad y_i = y(0.5) \quad y_{i+1} = y(1.0) \quad f(x_i, y_i) = f(0.5, 5.25) \quad h = 0.5 \quad \therefore$

$$y(1.0) = y(0.5) + f(0.5, 5.25)\ 0.5$$

Donde $y(0.5) = 5.25$ y el calculo de la pendiente en $x = 0.5$ es:

$$f(0.5, 5.25) = -2(0.5)^3 + 12(0.5)^2 - 20(0.5) + 8.5 = 1.25 \qquad \therefore \quad y_{i+1}$$

$$y(1.0) = 5.25 + 1.25\ (0.5) = 5.875$$

La solución verdadera en $x = 1.0$ es:

$$y = -0.5(1-0)^4 + 4(1.0)^3 - 10(1.0)^2 + 8.5(1.0) + 1 = 3.00000$$

$$\varepsilon_v = \left|\frac{3.00000 - 5.875}{3.00000}\right| \times 100 = 95.83\,\%$$

Resumiendo los resultados del problema en la siguiente tabla:

i	x_i	y_{Euler}	$f(x_i, y_i)$, $\frac{dy}{dx}$	$y_{verdadera}$	ε_v
0	0.0	1.000	8.5	1.00000	
1	0.5	5.250	1.25	3.21875	63.11 %
2	1.0	5.875	−1.5	3.00000	95.83 %

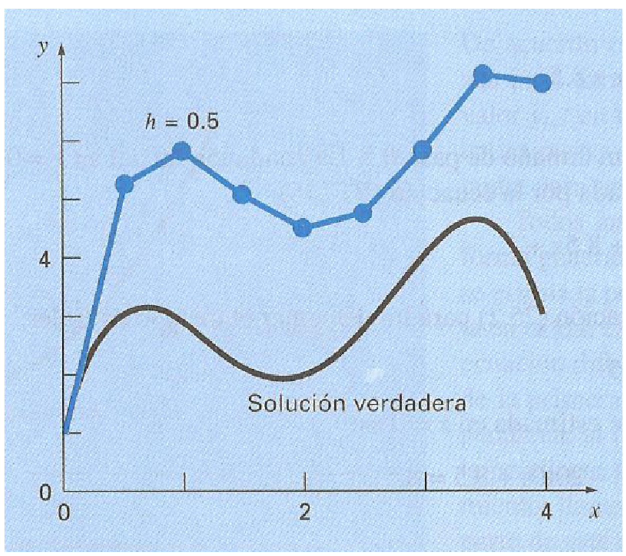

Figura 5:

Ejemplo: Repita la aproximación del ejemplo anterior pero ahora con un tamaño de paso igual a 0.25

MÉTODO DE HEUN

Un método de mejorar la aproximación a la pendiente implica el cálculo de dos derivadas del intervalo, una en el punto inicial y otra en el punto final. Enseguida se promedian las dos derivadas y se obtiene una proximación mejorada de la pendiente en el intervalo analizado. A este método se le llama *método de Heun*, se presenta en forma gráfica en la figura 6.

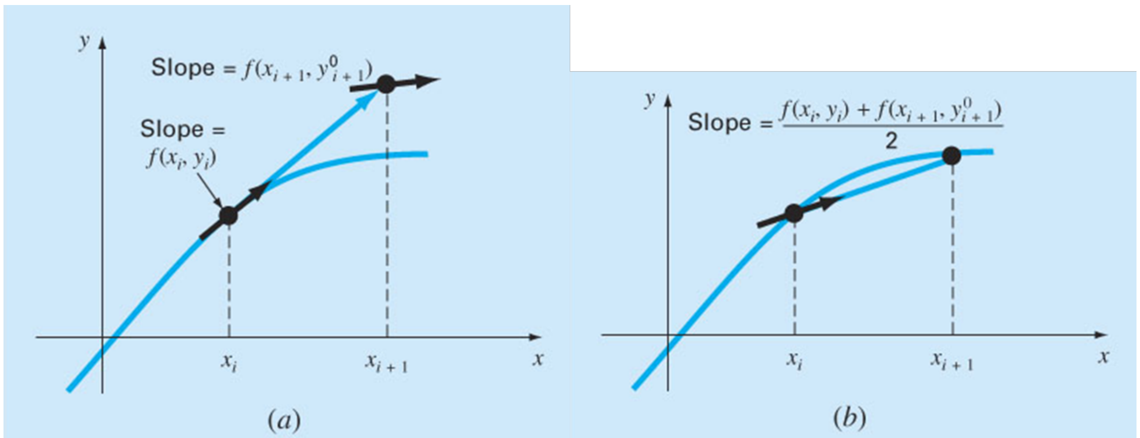

Figura 6:

Recuerde qué en el método de Euler, la pendiente al principio del intervalo es:

$$y'_i = f(x_i, y_i) \qquad (12)$$

La cual se usa para extrapolar y_{i+1}

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h \qquad (13)$$

En el *método de Euler* se detendría en este punto. Sin embargo, en el *método de Heun*, la y_{i+1} calculada con la ecuación (13), no es la respuesta final sino una predicción intermedia.

Entonces podemos distinguir a la ecuación (13) como sigue:

$$y^o_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h \qquad (13a)$$

y la llamaremos **ecuación predictora**, la que nos proporciona una aproximación de y_{i+1} que, a su vez, permite el calculo de una pendiente aproximada. $\therefore$ tenemos:

$$y'_{i+1} = f(x_{i+1}, y^o_{i+1}) \qquad (14)$$

Combinando las ecuaciónes (12) y (14) para obtener una pendiente promedio sobre el intervalo:

$$\overline{y'} = \frac{y_i' + y_{i+1}'}{2} = \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^o)}{2} \tag{15}$$

Esta pendiente promedio se una para extrapolar linealmente de y_i a y_{i+1} utilizando el *método de Euler*, por lo tanto tenemos:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^o)}{2}\ h \tag{16}$$

A la cual se le llama **ecuación correctora**.

Ejemplo:
Resolver por el *método de Heun* la siguiente:

$$y' = 4e^{0.8x} - 0.5y$$

Considere que la solución de la EDO es:

$$y = \frac{4}{1.3}e^{0.8x} - e^{-0.5x} + 2e^{-0.5x}$$

Desde $x = 0$ a $x = 4$ con un tamaño de paso $= 1$ y con condiciones iniciales $x = 0$, $y = 2$. Creamos una tabla con los siguientes datos:

i	x_i	$f(x_i, y_i)$, $\frac{dy}{dx}$	y_{Euler}	$f(x_{i+1}, y_{i+1})$	y_{Heun}
0	0.0	3.000			2.000
1	1.0	5.5516	5.000	6.4022	6.7011
2	2.0	11.6522	12.2527	13.6858	16.3198

Referencias

[1] Steven C. Chapra, y Raymond P. Canale. Métodos Numéricos para Ingenieros, (3th Ed). *McGraw Hill Interamericana Editores S.A. de C.V. ISBN 970-10-2008-1*, 2000.

[2] Curtis F. Gerald. Análisis Numérico, Segunda edición. *Alfaomega Grupo Editor, S. A. de C.V., ISBN 970-15-0235-3*. 1977.